261. 奇數次單葉羃級數ノ切斷ノ單葉半徑ニ就イテ, I

城　憲三（阪大工）

(1) $\varphi(z) = z + a_3 z^3 + \cdots\cdots + a_{2n+1} z^{2n+1} + \cdots\cdots$

ヲ $|z|<1$ デ正則單葉トスルトキ Fejér ハ次ノ定理ノ成立スルコトヲ Journal of London Math. Soc., 1933 (Vol. 8) ニ陳ベテヰル。

$\boxed{\text{定理}}$ $\varphi(z)$ ハ次ノ條件ヲ滿足スルモノトスル。

1° スベテノ係數 a_{2n+1} $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ實數,

2° $|z|<1$ ノ寫像領域ハ虚軸ノ方向ニ convex.

コノトキハ (1) ノスベテノ切斷

$$s_{2n+1}(z) = z + a_3 z^3 + \cdots\cdots + a_{2n+1} z^{2n+1} \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉デアル。

コノ定理ノ證明ハ Fejér ノ上記ノ論文ニハ書イテキナイ。彼ハソノ證明ヲ後日發表スル旨ヲ約シテヰルケレドモ未ダソノ發表ガナイヤウデアル。

筆者ハ 2° ノ條件ナシニ 1° ノ條件ダケデ Fejér ト同ジ結果ヲ得ルコトガ出來タ。

本論文ノ目的ハ之レヲ述ベルニアル、カクシテ係數ガ實數ナルトキニハ奇數次ノ單葉羃級數ノ切斷ノ單葉半徑ノ定理ハ完成サレタルコトニナル。*)

§1. $\boxed{\text{定理}}$

(1)ハ$|z|<1$デ正則單葉ニシテ條件1°ガ滿足サレテキルトスル。コノトキ(1)ノスベテノ切斷 $s_{2n+1}(z)=z+a_3z^3+\cdots\cdots+a_{2n+1}z^{2n+1}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉デアル。特ニ $\varphi(z)=\frac{z}{1-z^2}=z+z^3+\cdots\cdots$ ノ最初二項ノミノ切斷ヲ考フルコトニヨリ單葉半徑 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ハ之レ以上大キクスルコトハ許サレナイ。

豫備定理 1. $|z_1|$, $|z_2|<1$ ナルトキ

$$(2)\quad \left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\left(\frac{1-|z_1|^2}{1+|z_1|^2}\right)^2\cdot\frac{|1-\bar{z}_1z_2|}{(|z_1-z_2|+|1-\bar{z}_1z_2|)^2}.$$

證.

$$(3)\quad h(\zeta)\equiv\frac{-\varphi\left(\frac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}\right)+\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)(1-|z_1|^2)}=\zeta+\cdots\cdots$$

ヲ考ヘルト, $h(\zeta)$ ハ $|\zeta|<1$ デ正則單葉トナル, 從ツテ

$$(4)\quad |h(\zeta)|\geqq\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2},\qquad |\zeta|<1.$$

---

*) 係數ガ一般ニ複素數ナルトキニモ, $z+a_3z^3+a_5z^5+a_7z^7$ ヲ除キ他ノスベテノ切斷ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトハ直チニ示セル。シカシ $z+a_3z^3+a_5z^5+a_7z^7$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトノ證明モ必ズ出來ル自信ヲ得タ。コノタメニハ $|a_7|$, $|a_9|$ 等ヲ Levin ノ結果ヨリモ Scharf ニ評價シテ適用スル (Levin, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 39, p. 467 (1935) 參照)。コレ等ノ結果ノ發表ハ次回ニユヅリタイ。ココデハ係數ガ實數ナルトキノミヲ考ヘル。

今 $z_2=\dfrac{-\zeta+z_1}{1-\bar{z}_1\zeta}$ トオケバ $|z_2|<1$ ニシテ $\zeta=\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}$ トナルカラ (3) カラ

$$h\left(\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right)=\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{\varphi'(z_1)(1-|z_1|^2)}.$$

(4) ヲ用ヒテ

$$\left|h\left(\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right)\right|=\left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{\varphi'(z_1)(1-|z_1|^2)}\right|\geqq\frac{\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{\left(1+\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|\right)^2}.$$

又 $|\varphi'(z_1)|\geqq\dfrac{1-|z_1|^2}{(1+|z_1|^2)^2}$ デアルカラ上式ニ代入シテ

$$\left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\left(\frac{1-|z_1|^2}{1+|z_1|^2}\right)^2\cdot\frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{(|z_1-z_2|+|1-\bar{z}_1 z_2|)^2}$$

コノ結果ノ等号ハ z_2 ヲ z_1 トオキタルトキニ成立スル。（Grunsky ノ理論ニヨツテ，コノ豫備定理ハ非常ニ擴張シタモノニ出來ルケレドモ，以下ニ不要デアルカラ，コヽデハ省略スル）

豫備定理 2. (Dieudonné)

(5) $|a_{2n+1}|+|a_{2n-1}|\leqq 2,\quad (n=1,2,\cdots\cdots,a_1=1).$

(注意)：係数 a_{2n+1} $(n=1,2,\cdots\cdots)$ が複素数ノトキハ $|a_7|,|a_9|,\cdots\cdots$ 等ノ相當係数ヲ 1 ニ近イ値デ評價シタル筆者自身ノ結果ヲ用ヒル。コレニ相當シタコトが Szegö ノヤツタ奇數次デナイ一般ノ單葉冪級数ノ場合ノ定理ノ證明ノト

キニモアル（$|a_4|$, $|a_5|$ ノ相當ヨイ評價式）.

但シ相當ニ Scharf ニ限レバヨイノデ最上ノ結果ニ到ラナクテ濟ム。（上ノ $|a_7|$ 等ノ評價ノ方法ハ Ozaki 氏等ノヤラレタ方法ト似タ方法デヤレル —— Grandjot ノ方法）.

Levin ノ得タ結果 $|a_7|<1,25$, $|a_9|<1,38$ 等ヲ直接利用シタノデハ失敗ニ歸スル。但シ相當大ナル n ニ對シ重要ナル Levin ノ定理 $|a_{2n+1}|<3,4$ ハ勿論用ヒル。コノコトガ筆者ノコノ定理ヲ問題ニスル動機トナッテキルモノデアル。

§2. 定理ノ證明

$z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_2=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $|x|=1$ トスレバ (2) ノ右邊:

$$\left(\frac{1-|z_1|^2}{1+|z_1|^2}\right)^2, \frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{\left(|1-\bar{z}_1 z_2|+|z_1-z_2|\right)^2}=\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right)^2\cdot\frac{\left|1-\frac{x}{3}\right|}{\left(\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{|1-x|}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}|1-x|+\frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|}.$$

$z+a_3z^3+\cdots\cdots+a_{2n+1}z^{2n+1}$ ガ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトヲ示スニハ $|z_1|=|z_2|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナル如キ任意ノ z_1, z_2 ニ對シ

$$(6)\qquad \left|\frac{\varphi(z_1)-\varphi(z_2)}{z_1-z_2}\right|>\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_{2\nu+1}\frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right|$$

ナルコトヲ示セバヨイ。且ツ一般性ヲ失ハズ、$z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_2=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $|x|=1$ ト考ヘナヨイ。

先ヅ $n \geqq 3$ ニ對シ (6) ノ眞ナルコトヲ述ベヨウ。

$$\left|\sum_{\nu=4}^{\infty} a_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1}-z_2^{2\nu+1}}{z_1-z_2}\right| \leqq \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu} \cdot \left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|$$

$$\leqq \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}(2\nu+1).$$

而シテ豫備定理2ヨリ勿論 $|a_{2n+1}| \leqq 2$ デアルカラ

$$(7) \quad \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}(2\nu+1) \leqq \sum_{\nu=4}^{8} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}(2\nu+1) + \sum_{\nu=9}^{\infty} \frac{2(2\nu+1)}{3^\nu}.$$

右邊ノ最初ノ $\sum\limits_{\nu=4}^{8}$ ニ於テ予備定理2ヲ順次用ヒテ行クノデアルが，先ヅ $|a_{17}| \leqq 2-|a_{15}|$ ニヨリ

$$\sum_{\nu=4}^{8} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}(2\nu+1) \leqq \frac{34}{3^8} + |a_{15}| \cdot \left(\frac{15}{3^7} - \frac{17}{3^8}\right) + \frac{13 \cdot |a_{13}|}{3^6} + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$= \frac{34}{3^8} + \frac{28}{3^8}|a_{15}| + \frac{13 \cdot |a_{13}|}{3^6} + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

同様ニ考ヘテ

$$\leqq \frac{34}{3^8} + \frac{56}{3^8} + |a_{13}| \cdot \left(\frac{13}{3^6} - \frac{28}{3^8}\right) + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$= \frac{90}{3^8} + \frac{89}{3^8}|a_{13}| + \frac{11 \cdot |a_{11}|}{3^5} + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$\leqq \frac{90}{3^8} + \frac{178}{3^8} + |a_{11}| \cdot \left(\frac{11}{3^5} - \frac{89}{3^8}\right) + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$= \frac{268}{3^8} + \frac{208}{3^8}|a_{11}| + \frac{9 \cdot |a_9|}{3^4}$$

$$\leqq \frac{684}{3^8} + |a_9| \cdot \left(\frac{9}{3^4} - \frac{208}{3^8}\right)$$

$$= \frac{684}{3^8} + \frac{521}{3^8} \cdot |a_9|$$

$|a_9| < 1,38$ デアルカラ

$$\sum_{\nu=4}^{8} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}(2\nu+1) < \frac{684}{3^8} + \frac{1,38 \cdot 521}{3^8} = \frac{1402,98}{3^8}$$

$$< 0,214.$$

而シテ $\displaystyle \sum_{\nu=9}^{\infty} \frac{2(2\nu+1)}{3^\nu} < 0,003.$

依テ (7) ヨリ $n \geqq 3$ ニ對シ,

$$(8) \quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}(2\nu+1) < 0,214 + 0,003 = 0,217 < 0,22.$$

a) 先ヅ $|1-x| \leqq 0,26$ ナルトキハ (8) ニヨツテ

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|1-x| + \frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|} > 0,22$$

ガ成立スルコトヲ示サウ。

$$\left|1-\frac{x}{3}\right| \leqq \frac{2+|1-x|}{3} \leqq \frac{2+0,26}{3},$$

$$\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right| \leqq \frac{(0,26)^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{0,0676}{\frac{2}{3}}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}|1-x| + \frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|} \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{2+0,26}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0,26 + \frac{0,0676}{2}}$$

$$> \frac{3}{2 \cdot 6.5242}$$

$$= \frac{3}{13,0484} > 0,22.$$

b) 次ニ $|1-x|>0{,}26$ ナルトキニ (6) ノ成立スルコト

ヲ見ヨウ。コノトキハ

$$\sum_{\nu=4}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}\left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|<\frac{2}{|1-x|}\cdot\sum_{\nu=4}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}$$

$$<\frac{2}{|1-x|}\cdot\left\{\sum_{\nu=4}^{8}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}+\sum_{\nu=9}^{\infty}\frac{2}{3^{\nu}}\right\}.$$

而シテ又，予備定理2ヲ順次用ヒテ

$$\sum_{\nu=4}^{8}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^{\nu}}\leqq\frac{2}{3^{8}}+|a_{15}|\cdot\left(\frac{1}{3^{7}}-\frac{1}{3^{8}}\right)+\frac{|a_{13}|}{3^{6}}+\frac{|a_{11}|}{3^{5}}+\frac{|a_{9}|}{3^{4}}$$

$$=\frac{2}{3^{8}}+\frac{2}{3^{8}}|a_{15}|+\frac{|a_{13}|}{3^{6}}+\frac{|a_{11}|}{3^{5}}+\frac{|a_{9}|}{3^{4}}$$

$$\leqq\frac{2}{3^{8}}+\frac{4}{3^{8}}+|a_{13}|\cdot\left(\frac{1}{3^{6}}-\frac{2}{3^{8}}\right)+\frac{|a_{11}|}{3^{5}}+\frac{|a_{9}|}{3^{4}}$$

$$=\frac{6}{3^{8}}+\frac{7}{3^{8}}\cdot|a_{13}|+\frac{|a_{11}|}{3^{5}}+\frac{|a_{9}|}{3^{4}}$$

$$\leqq\frac{20}{3^{8}}+|a_{11}|\cdot\left(\frac{1}{3^{5}}-\frac{7}{3^{8}}\right)+\frac{|a_{9}|}{3^{4}}$$

$$=\frac{20}{3^{8}}+\frac{20}{3^{8}}\cdot|a_{11}|+\frac{|a_{9}|}{3^{4}}$$

$$\leqq\frac{60}{3^{8}}+|a_{9}|\cdot\left(\frac{1}{3^{4}}-\frac{20}{3^{8}}\right)$$

$$=\frac{60}{3^{8}}+\frac{|a_{9}|\cdot 61}{3^{8}}$$

$$\leqq\frac{60+61\cdot 1{,}38}{3^{8}}$$

$$=\frac{60+84{,}18}{3^{8}}$$

$$=\frac{144,18}{3^8}<0,02198.$$

而シテ

$$\sum_{\nu=9}^{\infty}\frac{2}{3^\nu}<0,00016.$$

故ニ

$$\sum_{\nu=4}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}\left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|<\frac{2}{|1-x|}\cdot\sum_{\nu=4}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}$$

$$<(0,02198+0,00016)\cdot\frac{2}{|1-x|}<0,02214\cdot\frac{2}{|1-x|}.$$

依ッテ $n\geqq 3$ ニ對シ

$$(9)\quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{|a_{2\nu+1}|}{3^\nu}\left|\frac{1-x^{2\nu+1}}{1-x}\right|<0,02214\cdot\frac{2}{|1-x|}.$$

從ッテ (6) ガ成立スルタメニハ

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{3}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}|1-x|+\frac{1}{3}\left|\frac{(1-x)^2}{1-\frac{x}{3}}\right|}>\frac{2}{|1-x|}\cdot 0,02214.$$

ナラバヨシ。シカシ上式ハ成立スル、何トナレバコノ為メニハ

$$\left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\left|\frac{1-x}{1-\frac{x}{3}}\right|<\frac{1}{8\cdot 0,02214}=5,6\cdots\cdots$$

ナルヲ要スルガ $|1-x|>0,26$ ナルコト, $\left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|$ ハ $(0,\pi)$ デ $\arg x$ ノ減少函數ナルコト及ビ $|1-x|=0,26$ ナルトキハ $\left|1-\frac{x}{3}\right|<1$ デアルコトヲ注意スレバ

$$\left|\frac{1-\frac{x}{3}}{1-x}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\left|\frac{1-x}{1-\frac{x}{3}}\right|<\frac{1}{0,26}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1+\frac{1}{3}}$$

$$<3,85+1,155\cdots\cdots+0,5=5,505\cdots<5,6$$

トナルカラデアル。

之デ $z+a_3z^3+\cdots\cdots+a_{2n+1}z^{2n+1}\ (n\geqq 3)$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトが分ッタ。次ニ $z+a_3z^3$, $z+a_3z^3+a_5z^5$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトヲ示サウ。之等ノ證明ハ a_3, a_5 が複素數ナルトキニモ成立スル。

§3. $z+a_3z^3$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ デ單葉ナルコトハ明ラカデアル。何者, $|a_3|\leqq 1$ デアルカラ

$$\left|\frac{(z_1+a_3z_1^3)-(z_2+a_3z_2^3)}{z_1-z_2}\right|=\left|1+a_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)\right|$$

$$\geqq 1-|a_3|\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\geqq 0.$$

次ニ,

$z+a_3z^3+a_5z^5$ ノ $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ テ單葉ナルコトヲ見ルニハ

$$R\left\{1+a_3(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+a_5(z_1^4+z_1^3z_2+z_1^2z_2^2+z_1z_2^3+z_2^4)\right\}>0$$

ナルコトヲ示セバヨイ。

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi},\quad z_2=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\varphi}$$ トオイテヨイカラ $(0\leqq\varphi\leqq\pi)$

上ノ括弧ノ中ノ式ヲ書キ代ヘルト

$$1+\frac{a_3}{3}(e^{i2\varphi}+1+e^{-i2\varphi})+\frac{a_5}{9}(e^{i4\varphi}+e^{i2\varphi}+1+e^{-i2\varphi}+e^{-i4\varphi})$$

$$=1+\frac{a_3}{3}(2\cos 2\varphi+1)+\frac{a_5}{9}(2\cos 4\varphi+2\cos 2\varphi+1)$$

$$=1+\frac{a_3}{3}(4\cos^2\varphi-1)+\frac{a_5}{9}(4\cos^2 2\varphi-2+4\cos^2\varphi-2+1)$$

$$=1+\frac{a_3}{3}(4\cos^2\varphi-1)+\frac{a_5}{9}(16\cos^4\varphi-12\cos^2\varphi+1)$$

$\cos^2\varphi\equiv\lambda$ トオケバ　$1\geqq\lambda\geqq 0$ ニシテ

$$=1+\frac{a_3}{3}(4\lambda-1)+\frac{a_5}{9}(16\lambda^2-12\lambda+1)$$

$$\equiv\psi(\lambda).$$

Löwner ニヨリ

$$(10)\quad\begin{cases} a_3=-\int_0^\infty x(\tau)e^{-\tau}d\tau\equiv x_1+iy_1, & |x(\tau)|=1, \\ a_5=\frac{3}{2}\left[\int_0^\infty x(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-\int_0^\infty x^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\equiv x_2+iy_2 \end{cases}$$

トオケバ

$$R\psi(\lambda)=1+\frac{x_1}{3}(4\lambda-1)+\frac{x_2}{9}(16\lambda^2-12\lambda+1)^{**)}$$

$$=\frac{16}{9}x_2\lambda^2+\left(\frac{4}{3}x_1-\frac{12}{9}x_2\right)\lambda+1-\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{9}.$$

$$=\frac{1}{9}\left[16x_2\lambda^2+(12x_1-12x_2)\lambda+9-3x_1+x_2\right]$$

$$=\frac{1}{9}\left[x_2(4\lambda)^2+3(x_1-x_2)(4\lambda)+9-3x_1+x_2\right]$$

$4\lambda=\xi$ トオケバ　$0\leqq\xi\leqq 4$ ニシテ

$$=\frac{1}{9}\left[x_2\xi^2+3(x_1-x_2)\xi+9-3x_1+x_2\right].$$

**) $x_2=0$ ナルトキハ $R\psi(\lambda)\geqq 0$, $(0\leqq\lambda\leqq 1)$. $x_2\neq 0$ ト考フ。

従ッテ　$0 \leqq \xi \leqq 4$　ニ對シ

$$\eta = \chi(\xi) \equiv x_2 \xi^2 + 3(x_1 - x_2)\xi + 9 - 3x_1 + x_2 > 0$$

ナラバヨシ。（$\eta = \chi(\xi)$ ハ ξ, η —平面ノ *parabala* ノ軸ハ η 軸ニ平行）

I.　$\boxed{x_2 > 0 \text{ ナル場合}}$

$$\chi(0) = 9 - 3x_1 + x_2 > 9 - 3|x_1| + x_2 > 0 \quad (\text{何トナレバ} |x_1| \leqq 1)$$

$$\chi(4) = 16x_2 + 12(x_1 - x_2) + 9 - 3x_1 + x_2 = 9x_1 + 5x_2 + 9 > 0$$

（仝　上）

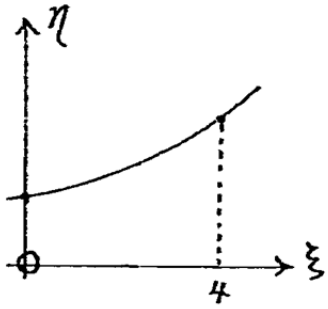
故ニ

1°　$\underline{x_1 \geqq x_2 \text{ ナラバ}}$

$\chi'(\xi) = 2x_2\xi + 3(x_1 - x_2) \geqq 0$ ダカラ

$0 \leqq \xi \leqq 4$ ニ對シ　$\chi(\xi) > 0$

（第一圖參照）



（第一圖）

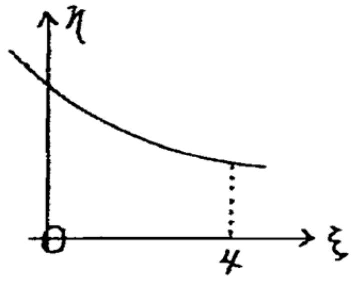
2°　$\underline{x_1 < x_2 \text{ ナラバ}}$　$3x_1 + 5x_2 \leqq 0$ ナルトキハ

$\chi'(0) = 3(x_1 - x_2) < 0,$

$\chi'(4) = 8x_2 + 3(x_1 - x_2) = 3x_1 + 5x_2 \leqq 0.$

ダカラ　$0 \leqq \xi \leqq 4$　ニ對シ

$\chi(\xi) > 0$（第二図參照）



（第二圖）

$3x_1 + 5x_2 > 0$ ナルトキハ

(ii)

$$-\frac{5}{3} < \frac{x_1}{x_2} < 1$$

トナリ

$$Min\, \chi(\xi) = \frac{4x_2(9 - 3x_1 + x_2) - 9(x_1 - x_2)^2}{4x_2}$$

$$=\frac{1}{4x_2}\left[-9x_1^2+6x_1x_2-5x_2^2+36x_2\right]$$

$$=\frac{1}{4}(6x_1-5x_2+36)-\frac{9}{4}\,\frac{x_1^2}{x_2}$$

$6x_1-5x_2+36\geqq 36-6|x_1|-5|x_2|>36-6-10=20$ デアルカ

ラ (11) ヲ用ヒ

$$>\frac{20}{4}-\frac{9}{4}|x_1|\cdot\left|\frac{x_1}{x_2}\right|>\frac{20}{4}-\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{3}>0.$$

故ニヤハリ, $0\leqq\xi\leqq 4$ デ $\chi(\xi)>0$.

II. $\boxed{x_2<0\text{ ナル場合}}$

ヤハリ $\chi(0)=9-3x_1+x_2\geqq 9-3|x_1|-|x_2|>0$ ニシテ, 次節 §4 ニテ証明スル如ク

$$\chi(4)=9x_1+5x_2+9>0$$

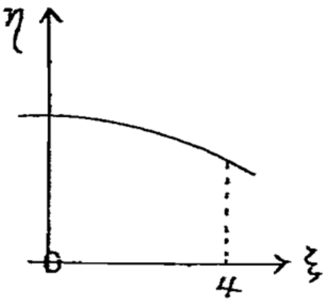
デアル。

1° $\underline{x_1\leqq x_2\text{ ナラバ}}$

$\chi'(\xi)=2x_2\xi+3(x_1-x_2)\leqq 0\quad(0\leqq\xi\leqq 4)$

故ニ $0\leqq\xi\leqq 4$ デ $\chi(\xi)>0$.

(第三図参照)



(第三圖)

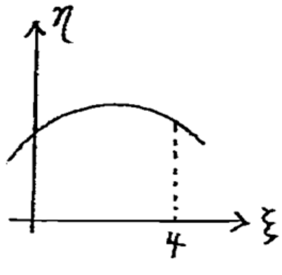
2° $\underline{x_1>x_2\text{ ナラバ}}$

$\chi'(\xi)=2x_2\xi+3(x_1-x_2)$ ヨリ

$\chi'(0)=3(x_1-x_2)>0$

故ニ $0\leqq\xi\leqq 4$ デ $\chi(\xi)>0$.

(第四図参照)



(第四圖)

ダカラ何レノ場合デモ $0\leqq\xi\leqq 4$ デ $\chi(\xi)>0$ デアル。

§4. $9x_1+5x_2+9>0$ ナルコトノ証明.

Löwner ノ式 (10) ニヨッテ不等式 $-9x_1-5x_2<9$ ノ左

辺ヲ書キ代ヘルト

$$-9x_1-5x_2=-9x_1-R\left\{\frac{15}{2}\left[\int_0^\infty \chi(\tau)e^{-\tau}d\tau\right]^2-5\int_0^\infty \chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right\},$$

$\chi(\tau)\equiv x(\tau)+iy(\tau)$ トカケバ

$$=-9x_1-\frac{15}{2}(x_1^2-y_1^2)+5\int_0^\infty [x^2(\tau)-y^2(\tau)]e^{-2\tau}d\tau$$

$$=-\frac{15}{2}x_1^2-9x_1+\frac{15}{2}y_1^2+5\int_0^\infty [x^2(\tau)-y^2(\tau)]e^{-2\tau}d\tau$$

$-\frac{15}{2}x_1^2-9x_1\leqq\frac{81}{30}$ デアルカラ

$$\leqq\frac{81}{30}+\frac{15}{2}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2+5\int_0^\infty [1-2y^2(\tau)]e^{-2\tau}d\tau$$

$$=\frac{81}{30}+5\int_0^\infty e^{-2\tau}d\tau+\frac{15}{2}\left(\int_0^\infty y(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2-10\int_0^\infty y^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$$

$$\leqq\frac{81}{30}+\frac{5}{2}+\int_0^\infty \left[\frac{15}{2}e^{-\tau}-10e^{-2\tau}\right]y^2(\tau)d\tau$$

$$=\frac{81}{30}+\frac{5}{2}-\int_0^\infty \left[\frac{15}{2}-10e^{-\tau}\right]y^2(\tau)d(e^{-\tau})$$

$$=\frac{81}{30}+\frac{5}{2}+\int_0^1\left(\frac{15}{2}-10x\right)y^2(-\log x)dx$$

$$=\frac{81}{30}+\frac{5}{2}+\int_0^{\frac{3}{4}}\left(\frac{15}{2}-10x\right)y^2(-\log x)dx$$

$$+\int_{\frac{3}{4}}^1\left(\frac{15}{2}-10x\right)y^2(-\log x)dx$$

最後ノ項ハ負デアルカラ, $y^2(-\log x)=y^2(\tau)\leqq 1$ ナルコ

トヲ用ヒテ

$$< \frac{81}{30}+\frac{5}{2}+\int_0^{\frac{3}{4}}\left(\frac{15}{2}-10x\right)dx$$

$$=\frac{81}{30}+\frac{5}{2}+\left[\frac{15}{2}x-10\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{81}{30}+\frac{5}{2}+\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{10}{2}\cdot\frac{9}{16}$$

$$< 2,7+2,5+2,82=8,02<9.$$

依ッテ定理ハ完全ニ証明セラレタ。